

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left] -\frac{1}{3}; +\infty \right[$ par :

$$f(x) = \frac{4x}{1+3x}$$

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Calculer u_1 .

2. On admet que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left] -\frac{1}{3}; +\infty \right[$.

- a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.
 - b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
 - c. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) . Déterminer la valeur de ℓ .
3. a. Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous qui, pour tout réel positif E , détermine la plus petite valeur P tel que : $1 - u_P < E$.

```
def seuil(E) :
    u = 0,5
    n = 0
    while .....
        u = .....
        n = n + 1
    return n
```

b. Donner la valeur renvoyée par ce programme dans le cas où $E = 10^{-4}$.

4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par :

$$v_n = \frac{u_n}{1 - u_n}$$

- a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 4.
En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n .
- b. Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = \frac{v_n}{v_n + 1}$.
- c. Montrer alors que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = \frac{1}{1 + 0,25^n}$$

Retrouver par le calcul la limite de la suite (u_n) .